物　理　（3問題　100点）

物理問題　I

次の文章を読んで，$\boxed{}$ に適した式または値を，**問1**では，指示にしたがって解答を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{}}$ は，すでに $\boxed{}$ で与えられたものと同じものを表す。

図1に示すように，傾斜角 θ の斜面とそれになだらかに続く水平面をもつ質量 M の台Qが，水平な床の上におかれている。台Qと床の間には摩擦はない。台Qの水平面の右端には，ばね定数 k のばねが水平にとりつけられている。ばねの質量は十分小さくて無視できるものとする。このとき，以下の(1)～(4)の状態を考える。

運動はすべて同一鉛直面内(すなわち，**図1**の紙面内)で起こるものとする。速度および加速度は床に対するものと定義し，水平方向の運動については右向きを正にとる。また，重力加速度の大きさを g とする。

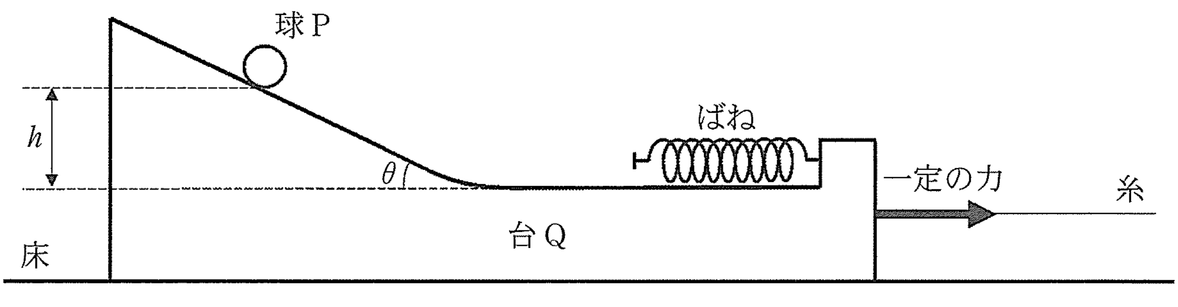

図1

(1)　床に対して静止している台Qの斜面部分の水平面から高さ h の位置に，大きさが無視できる質量 m の球(質点)Pを静かに載せると同時に，台Qを糸で一定の大きさの力で水平に引っ張り始めた。このとき，台Qと球Pは床に対して移動しつつ，球Pは水平面から高さ h のところにとどまった。球Pと台Qの間には摩擦はないものとする。球Pには重力と台Qからの抗力が作用しており，こ

れら二つの力の合力が作用する方向が水平方向となす角の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ となる。また，θ，m，M，g，h のうち必要なものを用いると，球Ｐが台Ｑから受ける抗力の大きさは $\boxed{\text{イ}}$ ，この抗力と重力の合力の大きさは $\boxed{\text{ウ}}$ ，球Ｐの水平方向の加速度は $\boxed{\text{エ}}$ と表せ，台Ｑに作用する力の合力の大きさは $\boxed{\text{オ}}$ ，糸が台Ｑを引っ張る力の大きさは $\boxed{\text{カ}}$ と表せる。

(2)　(1)の状態で，ある時間が経過したときに糸を切ったところ，球Ｐは台Ｑの斜面をすべり，水平面に到達した。糸を切った瞬間の台Ｑの速度を V_0 とする。球Ｐが水平面に到達した直後の球Ｐの速度 v_1 と台Ｑの速度 V_1 は，m，M，g，h，V_0 のうち必要なものを用いると，$v_1 =$ $\boxed{\text{キ}}$ ，$V_1 =$ $\boxed{\text{ク}}$ と表せる。

(3)　(2)の状態から，球Ｐは台Ｑの水平面を右方に移動し，ばねに到達してばねを縮ませた。ばねが最も縮んだ瞬間の球Ｐの速度を v_2，台Ｑの速度を V_2，ばねの自然長からの縮みを X とすると，m，M，g，h，k，V_0 のうち必要なものを用いて，$v_2 =$ $\boxed{\text{ケ}}$ ，$V_2 =$ $\boxed{\text{コ}}$ ，$X =$ $\boxed{\text{サ}}$ と表せる。なお，ばねは十分長く，縮みきることはないものとする。

(4)　(3)の状態の後，球Ｐはばねから押し戻される。球Ｐがばねから離れた直後の球Ｐの速度 v_3 は，m，M，g，h，k，V_0 のうち必要なものを用いると，$v_3 =$ $\boxed{\text{シ}}$ と表せる。

(4)の状態で，ばねから押し戻された球Ｐは台Ｑの水平面上において床に対して静止していた。このことから，(1)の状態で台Ｑを大きさ $\boxed{\boxed{\text{カ}}}$ の力で引っ張り続けた時間 T と，(2)で糸を切った瞬間の台Ｑの速度 V_0 は，θ，m，M，g，h のうち必要なものを用いて，$T =$ $\boxed{\text{ス}}$ ，$V_0 =$ $\boxed{\text{セ}}$ であったことがわかる。

問 1　以下の**図 2** を解答欄に描き写し，(2)で球 P が台 Q の水平面上を移動し始めてから，(3)でばねに接触して押し戻され，(4)で再び台 Q の水平面上を移動し始めるまでの，(i) 球 P の速度，(ii) 台 Q の速度，(iii) 球 P と台 Q の重心の速度について，それぞれの変化を表すグラフを描け。なお，(4)で，ばねから押し戻された球 P は台 Q の水平面上において床に対して静止していたとし，また，$M = 3m$ とする。球 P がばねに到達した時刻を t_1，ばねの縮みが最大となった時刻を t_2，球 P がばねから離れた時刻を t_3 とし，それぞれの時刻における球 P，台 Q，球 P と台 Q の重心の速度の値をそれぞれ記入すること。**図 2** に示すように球 P を実線で，台 Q を破線で，球 P と台 Q の重心を一点鎖線で描くこと。曲線部分は厳密でなくてもよいが，上に凸か下に凸かはわかるように描くこと。

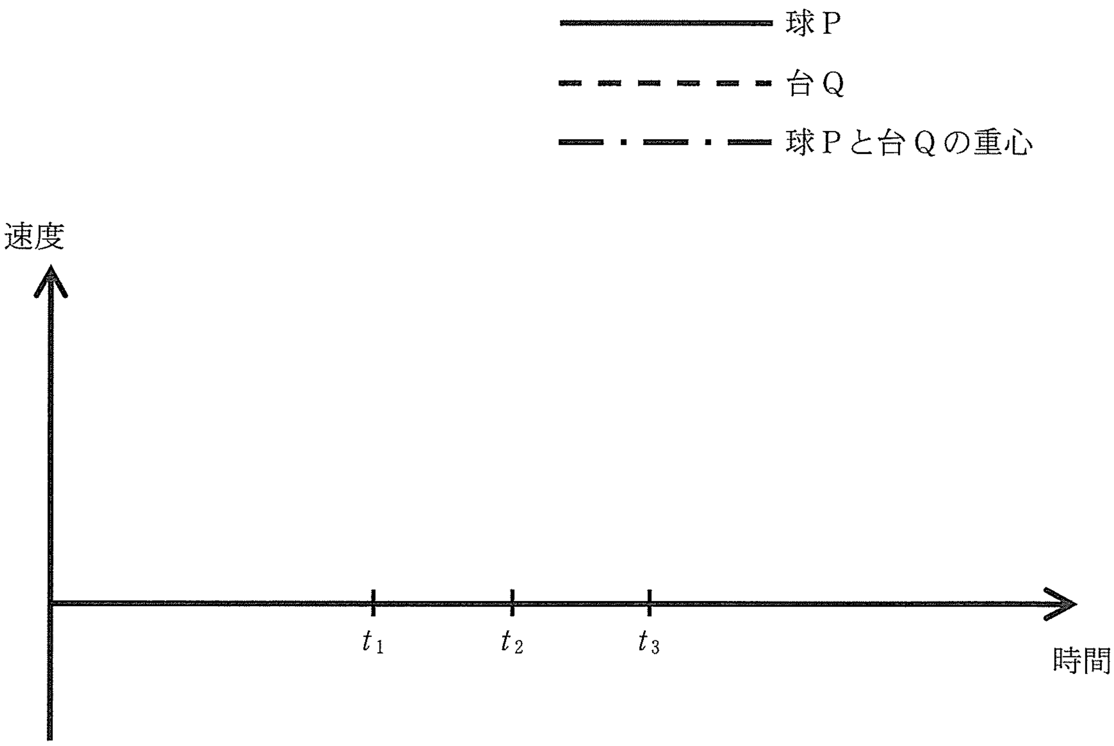

図 2

物理問題　II

次の文章を読んで，$\boxed{}$ には適した式を，{　　　}からは適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。また，**問1**と**問2**では，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図1のように，水平な台の上に，2本の平行な金属製レールを間隔ℓで敷き，その上に質量Mの導体棒をレールと垂直に置いて，手で押さえて導体棒を固定した。**図1**の灰色の領域には，一様な磁束密度$B(>0)$の磁界が鉛直上向きにかかっている。磁束密度が0の領域にあるレールの部分に，大きさRの抵抗とスイッチおよび自己インダクタンスLのコイルを取り付け，**図1**のような回路を作った。さらに，導体棒に質量mのおもりを滑車を介して糸でつり下げ，導体棒が，レールに平行な右方向の力mgで引かれるようにした。ここで，gは重力加速度の大きさである。以下，導体棒は常に**図1**の灰色の領域中のレール上にあるものとし，2本のレールと直交しながらレールに平行な方向のみに動くものとする。また，抵抗と明示したもの以外の電気抵抗，およびコイル以外の回路の自己インダクタンスは無視できるものとし，全ての摩擦力と糸の質量およびレールと導体棒の太さは無視できるものとする。円周率をπとする。

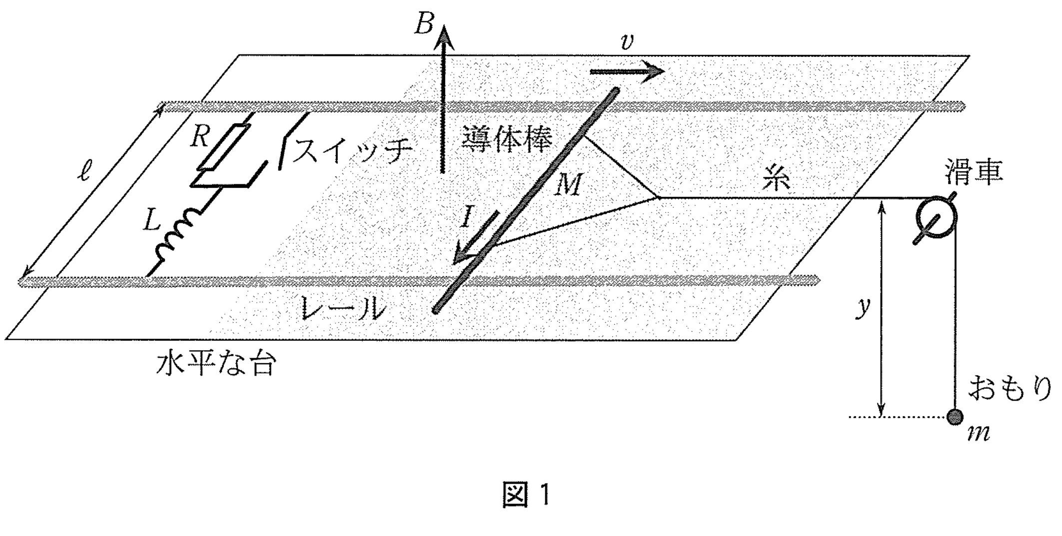

図1

図1のスイッチを開いたまま，時刻 $t = 0$ において導体棒から静かに手を放したところ，導体棒は図1の右方向にゆっくり動き始め，糸がたわむことなく導体棒は運動を続けた。

時刻 $t(> 0)$ における導体棒の速度を v，導体棒に流れる電流を I とする。ただし，v と I はそれぞれ正の向きを図1のようにとる。このとき，導体棒は磁界から図1の左方向に $\boxed{\quad イ \quad}$ の大きさの力を受ける。導体棒とおもりの運動方程式より，時刻 t からきわめて短い時間 Δt の間の速度 v の瞬間的変化率(時刻 t における瞬間の加速度)は，

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \boxed{\quad ロ \quad} \qquad (1)$$

で与えられる。一方，同じ時刻 t において，導体棒の両端には $\boxed{\quad ハ \quad}$ の誘導起電力が生じる。ただし，図1の I の方向に電流を流す起電力を正とする。また，時刻 t からきわめて短い時間 Δt の間の電流 I の瞬間的変化率を $\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ とすれば，コイルの両端には，$\boxed{\quad ニ \quad}$ の起電力が生じる。起電力の総和が抵抗による電圧降下に等しいことから，電流 I の瞬間的変化率は，

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \boxed{\quad ホ \quad} \qquad (2)$$

で与えられる。

磁束密度 B が十分小さくておもりが落下し続けるときは，十分時間が経過した後に v と I は一定の値 v_0，I_0 に近づく。その値は式(1)，(2)より $v_0 = \boxed{\quad ヘ \quad}$，$I_0 = \boxed{\quad ト \quad}$ と求まる。

問 1　導体棒の運動エネルギー $\dfrac{1}{2}Mv^2$ の瞬間的変化率は，

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{2}Mv^2\right)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}M(v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2}Mv^2}{\Delta t} = Mv\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

で与えられる(瞬間的変化率を考える際には $\dfrac{(\Delta v)^2}{\Delta t} = 0$ と置けることを用いた)。また，図1のように滑車とおもりとの距離を $y(> 0)$ とすれば，$\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = v$ の関係が成立する。これらのことを用いて，導体棒とおもりの力学的エネルギー $E_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}Mv^2 + \dfrac{1}{2}mv^2 - mgy$ の瞬間的変化率 $\dfrac{\Delta E_{\mathrm{m}}}{\Delta t}$ と，コイルが持つエネルギー $E_{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{2}LI^2$ の瞬間的変化率 $\dfrac{\Delta E_{\mathrm{c}}}{\Delta t}$ をそれぞれ求め，エネルギーの保存について論ぜよ。

速度 v と電流 I がそれぞれ一定値 v_0，I_0 に達したとみなせる時刻 t_0 において，おもりをつるしていた糸を静かに切ると同時に，**図1のスイッチを閉じた。** t_0 以降の時刻 t における速度 v と電流 I の瞬間的変化率は，

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \boxed{\text{チ}} \qquad (3)$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \boxed{\text{リ}} \qquad (4)$$

で与えられる。

方程式(3)，(4)を満たす速度 v と電流 I の時間変化は，**図2**のような，ばねにつながった質点の運動を考えることで理解できる。ここで**図2**は，滑らかな水平面上にばねの左端を固定し，そのばねの右端に質量 M の質点を接続した図であり，x はばねの自然長の位置からの変位である。実際，$x = \boxed{\text{ヌ}} \times I$ とすれば，式(4)は $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$ となり，v はこの質点の速度とみなすことができる。すると，式(3)は，**図2**でばね定数を $\boxed{\text{ル}}$ としたときの質点の運動方程式と同じ形になる。このことより，x の時間変化は周期 $T = \boxed{\text{ヲ}}$ の単振動となることがわかる。

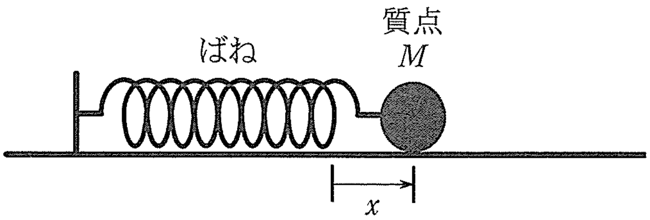

図2

上の結果と式(3)，(4)より，速度 v と電流 I の時間変化も，ともに0を中心とした周期 T の単振動となることがわかる。このとき，速度の位相は電流の位相よりも{**ワ**：① $\frac{\pi}{2}$ 進んでいる　② $\frac{\pi}{4}$ 進んでいる　③ $\frac{\pi}{4}$ 遅れている　④ $\frac{\pi}{2}$ 遅れている}。また，この単振動における速度と電流の最大値 v_1，I_1 は，それぞれ，v_0，I_0，L，M を用いて，$v_1 = \boxed{\text{カ}}$，$I_1 = \boxed{\text{ヨ}}$ と表される。

問 2　以下の**図 3** と**図 4** を解答欄に描き写し，$v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$，$I_0 = 1\,\mathrm{A}$，$L = 1\,\mathrm{H}$，$M = 1\,\mathrm{kg}$ としたときの，時刻 t_0 以降の速度 v と電流 I の時間変化を表すグラフをそれぞれ描け。ただし，横軸の目盛の間隔を $\dfrac{T}{8}$ とせよ。

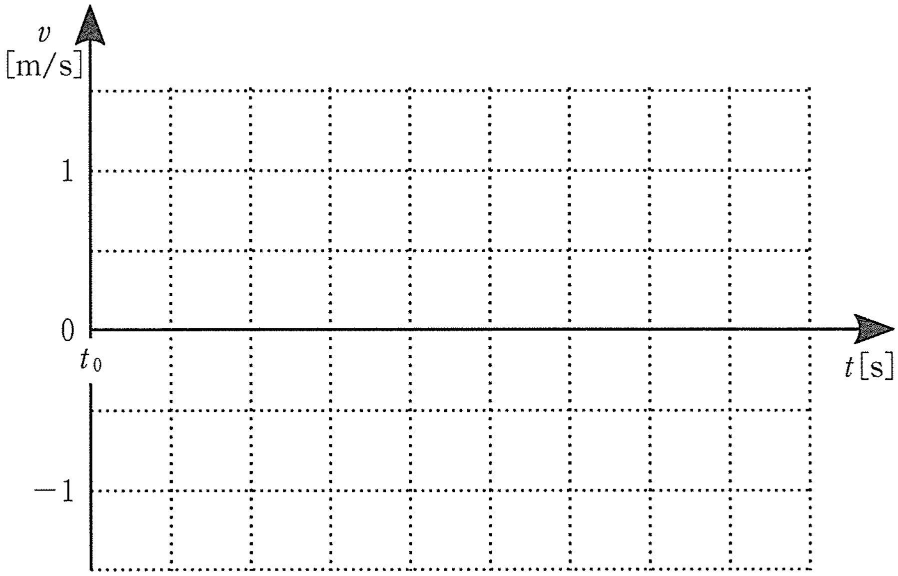

図 3

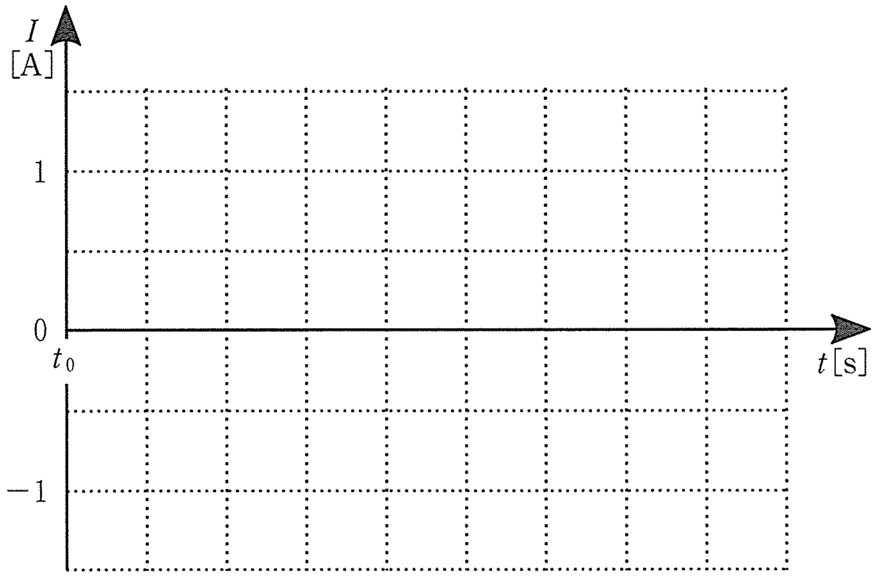

図 4

物理問題　III

次の文章を読んで，$\boxed{}$ に適した式を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{}}$ は，すでに $\boxed{}$ で与えられたものと同じ式を表す。また，**問1**では，指示にしたがって，解答を解答欄に記入せよ。

断熱材でできた断面積 S の U 字管が，**図1**のように鉛直に置かれている。左側の管の上端には栓が固定され，U 字管の内部をなめらかに動くピストンとの間に，単原子分子の理想気体が n モル封入されている。気体は，管の中に入れたヒーターで熱することができる。栓とピストンは断熱材でできており，ピストンの厚み，質量およびヒーターの体積は無視できるものとする。図の灰色の部分は，一定の密度 ρ の一様な液体で満たされており，右側の管の上端は開いている。重力加速度の大きさを g，気体定数を R とする。液体の蒸発，表面張力や毛細管現象などは考えなくてよいものとする。

(1)　はじめ，ピストンは左の管の直線部分に，液面は右の管の直線部分にあって，どちらも静止していたが，その高さには**図1**のように h だけの差があった。また，左の管の気体の占めている部分の長さは ℓ で，圧力は P_1 であった。このことから，外気圧は $\boxed{\text{あ}}$ であることがわかる。

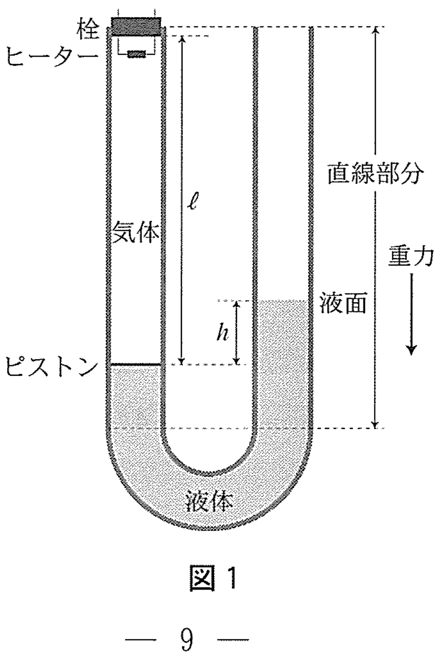

図1

（2） 図1の状態から，気体にある量の熱を加えたところ，ピストンの高さが x だけ下がったが，ピストンも液面もU字管のそれぞれの直線部分にとどまった。このときの気体の圧力は $\boxed{\text{い}}$ である。また，この過程で気体がした仕事は，x の2次式 $\boxed{\text{う}} \times x + \boxed{\text{え}} \times x^2$ で与えられる。同様に，気体の内部エネルギーの変化は $\boxed{\text{お}} \times x + \boxed{\text{か}} \times x^2$ であり，気体に加えた熱量は $\boxed{\text{き}} \times x + \boxed{\text{く}} \times x^2$ と表される。

（3） さらに気体に熱を加え，図2のようにすべての液体が右側の管の直線部分に存在するようにした。この状態からさらに気体に熱を Q だけ加えたところ，液体は上昇したが，液面はまだ管の上端には達しなかった。この熱 Q を加える過程において，気体の温度変化は $\boxed{\text{け}}$ であり，気体がした仕事は $\boxed{\text{こ}}$ である。

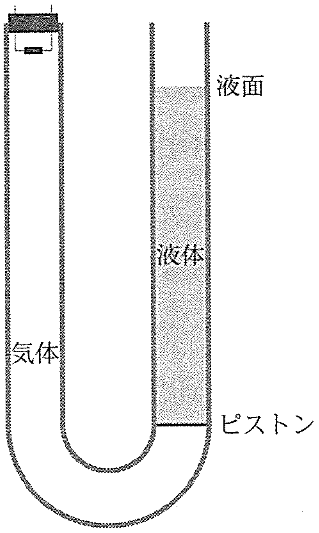

図2

(4)　さらに熱を加えて気体を膨張させたところ，**図3**のように液面がちょうど右側の管の上端に達して静止し，気体の圧力は P_3，体積は V_3 になった。このときピストンに働く力はつりあっているが，次に議論するように，そのつりあいには安定な場合と不安定な場合がある。以下では，ピストンに働く力は上向きを正とする。いま，**図3**の状態から，何らかの外力により断熱的にピストンの位置が $\Delta y(>0)$ だけわずかに上昇したとしよう。このとき，ピストンの上昇分の液体が管の上端からあふれ出るので，液体がピストンに及ぼす力は $\boxed{\text{さ}}$ だけ変化する。一方，断熱変化では(圧力)×(体積)$^{\frac{5}{3}}$ が一定であることと，絶対値が十分小さな実数 ε と任意の実数 α に対して成り立つ近似式 $(1+\varepsilon)^{\alpha} \fallingdotseq 1+\alpha\varepsilon$ を用い，必要ならば微小量 $\dfrac{S\Delta y}{V_3}$ に対して $\left(\dfrac{S\Delta y}{V_3}\right)^2$ が無視できるという近似を行うと，気体がピストンに及ぼす力は Δy に比例して $\boxed{\text{し}}$ だけ変化することがわかる。ここで，$\boxed{\text{さ}}$ と $\boxed{\text{し}}$ の和が負の場合，何らかの原因でピストンに微小変位を生じたとしても，変位を打ち消すような向きの力が発生することになる。このとき，力のつりあいは安定であるという。これに対し，$\boxed{\text{さ}}$ と $\boxed{\text{し}}$ の和が正の場合には，微小な変位が起こるとその変位をさらに増大させるような力が発生することになり，ピストンは一気に上昇してしまう。このとき力のつりあいは不安定であるという。したがって，**図3**でピストンに働く力のつりあいが安定であるためには $\boxed{\text{す}}$ の条件が必要である。

問1　条件 $\boxed{\text{す}}$ を満たす**図3**の状態から，さらに熱を加えつづけて気体を膨張させると，どのような変化が起こるか。ピストンに働く力のつりあいの安定性の条件が，気体の膨張にともなってどのように変化するかを考慮して説明せよ。

物理問題は，このページで終わりである。

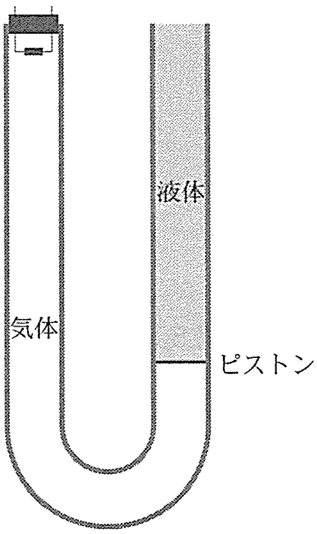

図 3